DOI：10.16503/j.cnki.2095-9931.2015.04.005 第1卷 第4期 | 2015年8月

二阶随机需求条件下公交网络的服务可靠性研究

赵 杰[1]，张 莉[2]，安新磊[1]

（1. 兰州交通大学 数理学院，甘肃 兰州 730070；2. 兰州工业学院 基础学科部，甘肃 兰州 730050）

摘要：引入服务可靠性这一概念，以乘客出行成本和车行运营成本最小为目标建立随机需求下的公交网络模型，并提出固定需求的服务方案模型和改进的二阶随机方案模型。该模型体现了乘客公交出行的选择策略并反映了公交网络中不确定需求和服务可靠性的相互联系。在分析公交出行网络中的服务设计，包括常规服务和特别服务的基础上，运用二阶下降法通过规定不确定的随机变量（服务可靠性参数）来求解二阶随机方案：首先在一阶段减少混合整数规划的数量以节省计算时间，随后在二阶段中模拟出一个线性规划，以便有效地求解二阶随机方案。最后，通过实例模型验证了该方案的可行性。

关键词：公交网络；服务可靠性；二阶下降法；随机方案；乘客需求

中图分类号：U491.17 **文献标识码**：A **文章编号**：2095-9931(2015)04-0030-08

Service Reliability of Public Transit Network under Condition of Two-Stage Stochastic Demand

ZHAO Jie[1], ZHANG Li[2], AN Xin-lei[1]

(1. School of Mathematics and Physics, Lanzhou Jiaotong University, Lanzhou 730070, China;
2. Department of Basic Courses, Lanzhou Institute of Technology, Lanzhou 730050, China)

Abstract: The notion of service reliability was introduced. The public transit network model with the stochastic demand was established through taking minimizing the passengers travel cost and bus operation cost as the target. The fixed demand service scheme model and two-stage stochastic scheme model were put forward respectively. The travel choice of passenger for public transit was embodied while the inter relation between stochastic demand and service reliability was reflected by this model. Then the service design of public transit network was analyzed, including the regular service and the particular service. The two-stage stochastic scheme was solved by using two-stage descent method and defining the stochastic parameter of service reliability. The computing time was saved by reducing the number of mixed integer programming during the first stage, and then a linear programming was simulated to solve the two-stage stochastic scheme during the second stage. Finally, the feasibility of this model was verified with instance model.

Key words: public transit network; service reliability; two-stage descent method; stochastic scheme; passenger demand

收稿日期：2015-06-02

基金项目：国家自然科学基金(61364001)；兰州交通大学青年科学研究基金(2014024)；甘肃省自然科学基金(1310RJZA028)

作者简介：赵杰(1993—)，男，甘肃西和人，硕士研究生，研究方向为非线性与复杂网络。
E-mail：zhaoj1993@126.com。

0　引言

随着科技的发展，公交系统作为城市中经典的复杂系统越来越受到人们的关注。公交网络问题也可以抽象成为经典的复杂网络，研究公交网络模型对于城市交通规划和管理具有重大而积极的意义。

早前对公交网络模型的研究多是以网络的结构特征以及拓扑性质为出发点来研究网络可靠性与抗毁性，高自友等人[1]对北京市的公交网络进行了实证研究分析，发现北京市公交网络具有无标度特性；郑啸等人[2]以北京市公交站点和公交线路为例构建了公交复杂网络模型，统计了多项静态指标并提出优化方案；王喆等人[3]对成都市公交网络建立了3种模型，得出公交网络的拓扑结构和静态参数，并对网络拓扑性质进行了分析。

公交网络不仅包括静态的网络特征，还包括一些动态的网络行为，例如网络中的客流分配方案、乘客的换乘选择行为以及乘客对出行的随机需求。随着对公交网络中乘客需求的深入考虑，服务可靠性的概念也被引入公交网络研究领域。Gao Z. Y.等人[4]基于确定的乘客需求建立了经典的客流分配服务模型；Szeto W. Y.等人[5]在随机用户均衡的基础上建立了客流分配服务模型；刘志谦等人[6]对广州轨道交通复杂网络特征和可靠性进行了研究，丁小兵[7]研究了上海城市交通的可靠性；Wang Z. W.等人[8]通过考虑乘客的偏好选择扩展出不同服务类型的方案；Bagloee S. A.等人[9]研究了交通网络设计问题优化预算约束下的服务可靠性。

在对公交网络的研究中，基于确定的乘客需求的文献已有很多，但研究随机条件下的乘客出行，即不确定的乘客需求的文献较少。陆化普等人[10]建立了OD需求不确定的离散交通网络设计模型；孙华等人[11]利用鲁棒性优化方法建立了OD需求不确定环境下交通网路设计极大极小模型并提出了平均法求解算法。

在实际生活中，乘客的出行与需求本身具有很大的不确定性，因此，研究随机需求条件下的乘客出行服务评估具有较强的现实意义，能够更清晰地体现乘客出行选择策略，更真实地反映公交网络中不确定需求与服务可靠性的相互联系。本文以乘客成本和运营耗费最小为目标，通过服务可靠性建立随机需求下的公交网络服务模型，服务可靠性可以分离出依赖于混合整数线性规划的二阶混合整数随机方案，通过二阶下降法规定不确定的随机变量参数 ρ 来求解二阶随机方案，并借助实例研究分析了模型的可行性，可为公交调度提供参考。

1　公交网络模型

1.1　相关假设

（1）假设只考虑单一的公交车行类型；

（2）假设每个OD对对应其出行的站点都服从一个确定的概率分布；

（3）假设涉及到多线路问题时，从站点 P 直接到站点 Q 的常规服务运营成本比从站点 P 途经站点 Z 换乘到站点 Q 的成本小；

（4）假设在一个规划周期内同一个站点不能选择返回并重新作为出发点。

1.2　符号定义

O：网络中初始节点，对应于公交网络中的始发站点；

D：网络中目的节点，对应于公交网络中的终点站点；

G：网络中OD节点对组成的集合；

$d \in G$：网络中节点对集合中第 d 对OD节点对；

$G^f=(N^f, A^f)$：在车行网络中点集 N 和边集 A；

$G^d=(N^d, A^d)$：在乘客网络中点集 N 和边集 A；

N_b^f, N_e^f：在相应的车行网络中一个规划周期内的初始点集和终点集；

S^f, S^d：在相应的车行网络和乘客网络中的服务边；

W^f, W^d：在相应的车行网络和乘客网络中的等待边；

M^d：在乘客网络中的第 d 个人工节点；

(O^d, M^d)：上述乘客网络中人工节点对应的初始节点；

(M^d, D^d)：上述乘客网络中人工节点对应的目的节点；

H：重新启用计划持续时间的车行相关的固定成本；

N：最大的公交车数目；

ξ：公交车行的换乘能力；

U_{ij}^{f}：在车行网络中等待边 $(i,j)\in W^{f}$ 的最大值；

F_{ij}：在每一次出行中节点 i 与节点 j 之间的使用费用；

F_{ij}^{W}：每名乘客在等待边 $(i,j)\in W^{d}$ 上的等待耗费；

F_{ij}^{S}：每名乘客在服务边 $(i,j)\in S^{d}$ 上的出行耗费；

R：实例生成的集合；

B^{d}：在第 d 对OD节点对上的外生需求；

ρ^{d}：在第 d 对OD节点对上的服务可靠性，其中 $\rho=\{\rho^{d}\}$；

Y_{ij}：在车行网络中车行边的总数量，其中 $Y=\{Y_{ij}\}$；

X_{ij}^{d}：在乘客网络中享受常规服务的乘客量，其中 $X=\{X_{ij}\}$；

Z_{ij}^{d}：在乘客网络中享受特别服务的乘客量，其中 $Z=\{Z_{ij}\}$。

1.3 车行网络

定义车行网络为图 $G=(N^{f},A^{f})$（见图1），其中，N^{f} 是该网络中的节点集合，A^{f} 是公交车出行的边集合，A^{f} 又包括2个子集（2层含义）：服务边集合 S^{f} 和等待边集合 W^{f}，并且有 $A^{f}=S^{f}\cup W^{f}$。每一条服务边都描述了一次公交车出行，并且其始发站、终点站、出行时间都会被相应的网络节点所决定。车行边的成本包括运营成本（例如：燃料耗费、维修费用）以及正常出行成本，车行网络上的等待边为非负整数，它表示停靠在一个公交站点的公交车的数目，假设等待边的操作成本可以忽略不计。

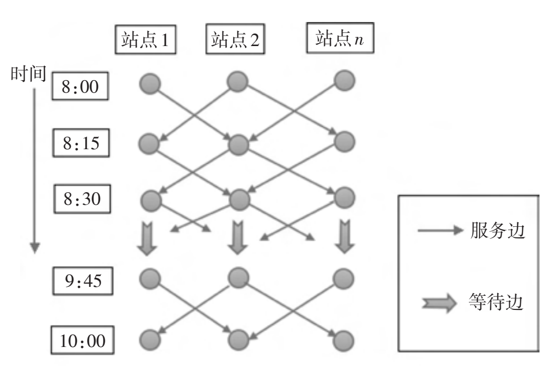


图1 车行网络示意图

1.4 乘客网络

同样定义乘客网络为图 $G=(N^{d},A^{d})$（见图2），其中，N^{d} 是乘客出行的节点集合，A^{d} 是乘客出行的边集合。与 A^{f} 集合相类似，A^{d} 也包括2个子集（2层含义）：服务边集合 S^{d} 和等待边集合 W^{d}，并且有 $A^{d}=S^{d}\cup W^{d}$。此外，与每个乘客网络图 $G=(N^{d},A^{d})$ 相关联的有1个人工节点 M^{d} 和2个人工边：初始边（O^{d},M^{d}）和目标边（M^{d},D^{d}）。服务边定义为乘客在公交站点之间的出行，其出行时间被网络中相应的节点所决定，乘客边代表出行在公交车上的乘客的数目，它也会受到车行服务能力的影响。另外，等待边的权值代表在每个站点等待的乘客的数目，等待边可能由于能力不足而不能满足所有需求。

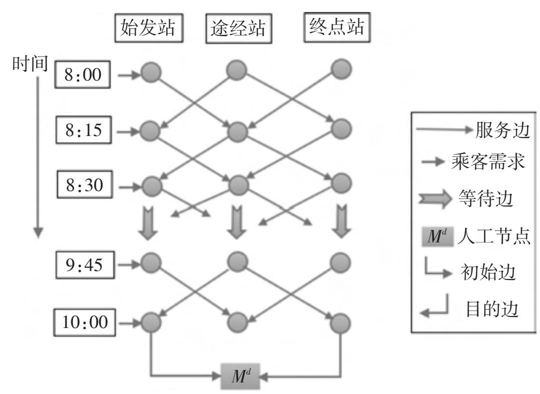


图2 乘客网络示意图

在乘客网络中，初始边由初始节点和与每1个特定的OD对相关的人工节点 M^{d} 构造而成，其中初始边代表在原始节点处没有服务到的乘客的数目，可以理解为在规划周期内未对服务感到满意或者不再有需求的乘客数目。同理乘客网络中的目的边由目的节点和人工节点 M^{d} 构造而成，这时目的边代表着在规划周期内所到达目的节点的乘客数目，也可以理解为服务总需求边。

1.5 服务可靠性

较早的研究只是从定性角度讨论可靠性这一概念，而并没有对其进行数值度量，后来引入了概率与统计的方法，可靠性才有了较多的定量的应用。可靠性指的是系统在规定条件下和规定时间内完成规定功能的能力。在复杂网络中，可靠性已被作为整体规划、设计和实施的重要部分，用来评价网络模型的功能和效率。在公交网络中可以用服务可靠

性来分析公交公司服务网络提供服务的稳定水平，用于优化和设计可靠的公交出行网络，从而提高公交网络的服务质量，降低成本。

2　需求及服务模型方案

2.1　固定需求方案

含有固定需求 B^d 的确定方案可表示为：

$$P_0 \quad \min I = H\sum_{i\in N_b^f}\sum_{j\in \bar{N}_b^f} Y_{ij} + F_{ij}\sum_{(i,j)\in S^f} Y_{ij} + F_{ij}^W \sum_{d\in G}\sum_{(i,j)\in W^d} X_{ij}^d + F_{ij}^S \sum_{d\in G}\sum_{(i,j)\in S^d} X_{ij}^d \tag{1}$$

$$\text{s.t.} \quad \sum_{j\in N^f} Y_{ij} - \sum_{k\in N^f} Y_{ki} = 0 \quad \forall i\in(\bar{N}_b^f \cap \bar{N}_e^f) \tag{2}$$

$$\sum_{i\in N_b^f}\sum_{j\in \bar{N}_b^f} Y_{ij} \leqslant N \tag{3}$$

$$\sum_{j\in N^d} X_{ij}^d - \sum_{k\in N^d} X_{ki}^d = \begin{cases} B^d & \text{当}i\text{是OD对}d\text{上的始点时} \\ 0 & \text{其他} \end{cases} \tag{4}$$

$$\sum_{d\in G} X_{ij}^d \leqslant Y_{ij}\xi \quad \forall (i,j)\in S^f \tag{5}$$

$$0 \leqslant Y_{ij} \leqslant U_{ij}^f \quad \forall (i,j)\in A^f \tag{6}$$

$$Y_{ij}\text{是整数} \quad \forall (i,j)\in A^f \tag{7}$$

定义目标函数为总体耗费的最小值，包括运营成本和乘客耗费成本，其主要包含以下4个部分：

（1）乘坐1次公交车服务时间内的固定成本；

（2）每次出行的操作耗费，例如燃料耗费和劳动力成本；

（3）乘客的等待时间耗费；

（4）乘客的出行时间耗费。

在这个目标函数中，忽略了运营公司的税收和乘客的票价费用。目标函数中的第1个和式给出了总的固定成本；第2个和式给出了总的出行耗费成本，应注意等待边是由1个站点在连续的2个时间点生成的；第3个和式给出了总的乘客等待时间耗费，其中 F_{ij}^W 是每个乘客在每个时间间隔的等待耗费；第4个和式给出了总的乘客出行时间耗费，其中 F_{ij}^S 是每个乘客在服务边 i 到 j 上的出行耗费。约束条件中，式（2）为确保车行网络中每一站点的车行量；式（3）说明在操作过程中不得超过最大的容许公交车数目；式（4）给出了在乘客网络中考虑到外生需求时每个节点对乘客的保护条件；式（5）结合了所有的OD对上服务边 (i,j) 的乘客数和每个服务边 (i,j) 上公交车行能力的总乘客量需求；式（6）提供了车行边 (i,j) 的上界；式（7）规定了车行变量必须是整数。

在公交网络服务设计的过程中，目标是控制车行变量 Y_{ij} 和乘客变量 X_{ij}^d 来最小化系统的总成本，这一规划并没有明确说明在每个OD出行过程中如何选择出行方式和出行路径，也没有明确地检测出车行服务是直达还是需要换乘，这些情况都会在给定的条件（1)~(7）中被整合出来。总之，这一规划构成了混合整数线性规划。

2.2　二阶随机方案

下文主要研究那些不确定的需求却服从一定概率分布的情形。

首先列入两种服务类别：一种是固定的公交出行类型的运转，即常规服务；另一种是尽可能地把这些服务转包给第三者，即特别服务。在随机发展过程中，这一构想又可划分为2个阶段：第一阶段确定常规服务需求，第二阶段确定特别服务需求。在常规服务的确定过程中，也必须考虑由特别服务引发的预期耗费。一种极端是如果特别服务能够以较低的耗费成本转包，那么也就不用维持常规服务；另一种极端是特别服务很昂贵，尽管有时常规服务不能被完全利用，但有利于实现常规服务容许下的需求。通过制定常规服务时间表并引入特别服务，使得总体耗费成本的期望值最小，这样，乘客的随机需求就可以通过连续的概率分布来描述，而预期的随机特别耗费以及乘客出行耗费则通过需求实现过程中的整函数来表达。然而大多数情况下，必须借助方案模拟来估计预期耗费成本，根据实际指定的问题选择适当的采样方法。因此，直接在实例模拟的情况下制订出方案。

假设方案生成的数目为 n，方案集合定义为 $R=\{1,2,\cdots,n-1,n\}$，每1个方案 r 都有相等的概率 $p_r=\dfrac{1}{n}$，且有 $\sum_{r\in R} p_r = 1$，在二阶随机方案中每1个下标 r 都代表着1种特殊情形的方案。

令 $\bar{B}^d$ 是OD对 d 上的随机需求，B_r^d 是在方案 r 中的1个需求实现，令 A 为特别服务的单位成本，Z_r^d 为方案 r 下OD对 d 上被转包的特别服务。此外，令 $X_{ij,r}^d$ 为方案 r 下的乘客变量，确立生成的方案可表示为：

$$P_1 \quad \min_{X,Y,Z} I = H\sum_{i\in N_b^f}\sum_{j\in \bar{N}_b^f} Y_{ij} + F_{ij}\sum_{(i,j)\in S^f} Y_{ij} + \bar{E}(Y) \tag{8}$$

$$\bar{E}(Y)=\min_{Z_r^d}\sum P_r(A\sum_{d\in G}Z_r^d+F_{ij}^W\sum_{d\in G}\sum_{(i,j)\in W^d}X_{ij,r}^d+F_{ij}^S\sum_{d\in G}\sum_{(i,j)\in S^d}X_{ij,r}^d) \quad (9)$$

$$\text{s.t.} \quad H\sum_{j\in N^f}Y_{ij}-\sum_{k\in N^f}Y_{ki}=0 \quad \forall i\in(\bar{N}_b^f\cap\bar{N}_e^f) \quad (10)$$

$$\sum_{j\in N^b}\sum_{j\in\bar{N}_b^f}Y_{ij}\leqslant N \quad (11)$$

$$0\leqslant Y_{ij}\leqslant U_{ij}^f \quad \forall(i,j)\in A^f \quad (12)$$

$$Y_{ij}\text{是整数} \quad \forall(i,j)\in A^f \quad (13)$$

$$\sum_{j\in N^d}X_{ij,r}^d-\sum_{k\in N^d}X_{ki,r}^d=\begin{cases}B_r^d-Z_r^d & \text{当}i\text{是OD对}d\text{上的始点}\\0 & \text{其他}\end{cases} \quad (14)$$

$$\sum_{d\in G}X_{ij,r}^d\leqslant Y_{ij}\xi \quad \forall(i,j)\in S^f,\forall r\in R \quad (15)$$

所有的变量均是非负的。P_1 是服从二阶随机方案的类型，为了确定依赖于常规服务 Y 和需求实现的特别服务耗费，目标函数包含了期望 $\bar{E}(Y)$，因此没有 Y 也不能被确定先验，这两种服务类型的相互作用使公交网络的服务设计问题变得更加复杂。

2.3 随机可靠性方案与二阶下降法

乘客的不确定需求导致了研究服务问题的不确定性，为了更加清晰地讨论这一不确定性，将乘客需求划分为2个部分：一部分是以服务可靠性规范为基础的服务需求，也即被常规服务所肯定的服务需求；另一部分是超出此规范的服务需求，即有特定需求所采取的特别服务。在这个问题上服务可靠性则是作为内部变量而存在。定义 ρ^d 为服务可靠性参数，或者理解为能被常规服务所覆盖的OD对 d 上的需求可能性，ρ 为 ρ^d 的集合表示，令 φ_d 为随机需求 $\bar{B}^d$ 的累积分布函数，则OD对 d 上确定能被常规服务所覆盖的需求为 $\bar{B}^d=\varphi_d^{-1}(\rho^d)$，其中在服务水平 $\bar{B}^d$ 处常规服务被用来作为优化需求，一阶段随机方案如下：

$$P_2 \quad \min_{X,Y}I=H\bar{N}+F_{ij}\sum_{(i,j)\in S^f}Y_{ij}+F_{ij}^W\sum_{d\in G}\sum_{(i,j)\in W^d}X_{ij}^d+F_{ij}^S\sum_{d\in G}\sum_{(i,j)\in S^d}X_{ij}^d \quad (16)$$

$$\text{s.t.} \quad \sum_{j\in N^f}Y_{ij}-\sum_{k\in N^f}Y_{ki}=0 \quad \forall i\in(\bar{N}_b^f\cap\bar{N}_e^f)$$

$$\sum_{j\in N_b^f}\sum_{j\in\bar{N}_b^f}Y_{ij}=\bar{N}\leqslant N$$

$$\sum_{j\in N^d}X_{ij}^d-\sum_{k\in N^d}X_{ki}^d=\begin{cases}\bar{B}^d & \text{当}i\text{是OD对}d\text{上的始点时}\\0 & \text{其他}\end{cases}$$

$$0\leqslant Y_{ij}\leqslant U_{ij}^f \quad \forall(i,j)\in A^f$$

$$Y_{ij}\text{是整数} \quad \forall(i,j)\in A^f$$

$$\bar{B}^d=\varphi_d^{-1}(\rho^d)$$

$$\sum_{d\in G}X_{ij}^d\leqslant Y_{ij}\xi \quad \forall(i,j)\in S^f$$

$$0\leqslant\rho^d\leqslant 1 \quad \forall d\in G$$

方案 P_2 是混合整数线性规划，同方案 P_0 的约束条件（1）~（7）确立的条件相同。通过调整服务可靠性 ρ，更改在 $\bar{B}^d$ 可覆盖的需求水平并产生最佳的常规服务方案 Y。

在第一阶段的问题中，设定固定车行规模数目为 $\bar{N}$，且有 $\bar{N}\leqslant N$，其中出行或者换乘的耗费也是固定的。基于随机方案的服务可靠性 ρ 和 P_2 中确定的最佳的常规服务安排 Y，针对每个需求实现情况给出第二阶段方案：

$$P_3 \quad \min_{X,Z}E_r=A\sum_{d\in G}Z_r^d+F_{ij}^W\sum_{d\in G}\sum_{(i,j)\in W^d}X_{ij}^d+F_{ij}^S\sum_{d\in G}\sum_{(i,j)\in S^d}X_{ij}^d \quad \forall r\in R \quad (17)$$

$$\text{s.t.} \sum_{j\in N^d}X_{ij,r}^d-\sum_{k\in N^d}X_{ki,r}^d=\begin{cases}B_r^d-Z_r^d & \text{当}i\text{是OD对}d\text{上的始点时}\\0 & \text{其他}\end{cases} \forall d\in G$$

$$\sum_{d\in G}X_{ij,r}^d\leqslant Y_{ij}\xi \quad \forall(i,j)\in S^f$$

方案 P_3 中的目标函数包含了特别服务耗费成本、乘客等待时间耗费成本以及乘客出行时间耗费成本。注意到常规服务 Y 或者 Y_{ij} 如上面约束条件所反映的在解决第一阶段问题 P_2 时已经被固定并且约束着常规服务中的乘客量。所有的超出常规服务能力的需求实现都会被作为特别服务，如式（18）所示，P_3 在形式上类似于 P_2，是一个线性规划。

特别服务的期望以及等待时间的耗费都可以由下式给出：

$$\bar{E}(\rho)=\sum_{r\in R}\rho_r E_r \quad (18)$$

将上述2个阶段结合可得出如下基于随机方案的目标函数式：

$$\min_{X,Y,Z}\varphi(\rho)=H\bar{N}+\sum_{(i,j)\in S^f}Y_{ij}F_{ij}+\bar{E}(\rho) \quad (19)$$

对给定的服务可靠性 ρ，式（19）中前2个式子是指在 P_2 中提到的常规服务耗费；$\bar{E}(\rho)$ 是指特别服务耗费的期望，包括 P_3 解决的乘客等待时间耗费和乘客出行时间耗费。该方案的目标是求得最优的服务可靠性指数 ρ，使得式（19）提到的结

合常规服务耗费、特别服务耗费期望、等待时间耗费和出行时间耗费的总期望值最小。

为求解该函数，设计二阶下降方法，通过 ρ 求得 P_2 并多次反复求 P_3 直到满足停止标准。

方案 P_2 和 P_3 通过引入服务可靠性 ρ 将常规服务 Y 和特别服务 Z 的相互作用分离成二阶随机方案 P_1。因此问题的关键是这两种等价的构想是否能得到等价的理想方案。首先，研究这两种方案的可行区域是否相同；其次，要分析任意基于服务可靠性的随机方案的可行解是否都分布在原始的二阶随机方案的可行域中，原始的二阶随机方案的最优解是否又会落在基于服务可靠性的随机方案的可行区域中，现给出以下命题：

命题1：任意基于服务可靠性随机规划方案的可行解对原始的二阶随机方案都是可行的。

命题2：对于概率分布在 $[0,+\infty)$ 上的随机需求问题，任意原始的二阶随机方案的最优解可以被基于服务可靠性的随机方案规划生成。

提出的求解过程称为基于服务可靠性的下降求解过程，它并不像常规解法那样通过减小可行区域来找最优解，而是通过服务可靠性 ρ 来确定下降方向。一旦常规服务 Y 给定，相应的最低成本也即确定。因此首先要找到 Y^*，由于 Y 的离散性质，即它的所有元素的影响在同一时间不可能通过 Y 直接进行线搜索，这也是基于服务可靠性 ρ 来确定目标函数下降方向的原因。对给定的初值 ρ，沿着目标函数下降方向来寻找最优的 ρ^*。从实践的角度来说，ρ 的物理意义为常规服务携带的随机需求的可能性，它能更加清楚地帮助初始点 ρ_k 解决各类问题。

2.4 ρ 的优化过程

2.4.1 确定 ρ 的可行变化范围

当出行的车行规模上界足够大（也即 U_{ij}^f 和 N 相对于需求水平足够大），ρ 的可行域应介于 $[0,1]$；当出行的车行规模上界较小，此时 ρ 的可行区域应定义为适当确保第一阶段问题 P_2 的可行性。因此在解决 P_2 问题之前先要计算出 ρ 的可行区域。通过尽可能大地设置 Y_{ij} 来获得最大的总需求使得常规需求可以覆盖其相应的 ρ，也可以求得每个OD对和 ρ^d 的最大需求，程序步骤描述如下。

（1）通过求解：

$$\max_{\rho^d} \sum_{d\in R} \bar{B}^d \tag{20}$$

来获得上界 ρ，其受制于方案 P_2 的约束条件。

（2）通过求解：

$$\max_{\rho^d} \rho^d \quad \forall d \tag{21}$$

来获得个别 ρ^d 的上界变量，其受制于方案 P_2 的约束条件。

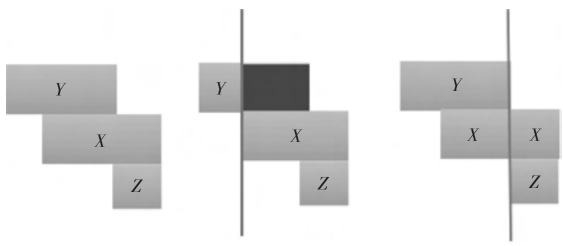
式（20）和式（21）定义了 ρ 的可行范围，并将 $\bar{B}^d$ 定义为决策变量，一旦 $\bar{B}^d$ 给定，ρ 也可以由相应的需求累积分布函数计算得出。

对于初始点 $\rho_k=(\rho_k^d)$，首先通过 P_2 和 P_3 找到总的系统耗费，然后通过对目标函数求偏导来找 ρ 的下降方向，这样能及时更新 ρ 以便于更好地进行下一次迭代。重复这一过程直到满足停止条件，这一过程中每个变量的下标 k 都代表着迭代次数。

2.4.2 解决方案示意图

原始的二阶段问题的约束条件离散化后可以由图3(a）表示，其中包括3个决策变量：Y（常规服务）、X（常规服务下的乘客量）、Z（特别服务下的乘客量）。这3个变量相互作用与相互制约构成了初始的约束条件：将约束条件集分成3个区域，左区仅含 Y，包括车行保障和车行规模约束，也即 P_1 中的式（9)~(12)；中间区包括 Y 和 X，代表着在常规服务下没有超出车行能力的乘客量，即 P_1 中的式（15)；右区包括 X 和 Z，意味着乘客的实际需求包括采用常规服务的乘客量 X 和特别服务的乘客量 Z。对离散后连续条件下的随机需求，需要考虑各区域达到理想状态的准确度，因此，P_1 会变得相当大导致计算很难完成，常规解法通常利用这一问题的特殊结构将其分离成2个部分：主部分和子部分（见图3(b)），主部分仅和 Y 有关，在每一次迭代中，优化子部分会生成1个或多个主部分的约束条件。因此，在每次迭代中随着计算的进行，主部分的约束条件会越来越多，计算量也会越来越大。常规方法的优点是一开始时的下降速度很快，但越到后期越疲乏。而本文提出的二阶下降法也采用类似的原理将原始的问题分解为2个阶段：一阶段和二阶段（见图3（c））。一阶段问题是混合整数线性规划，而二阶段问题是简单的线性规划，二者相对于之前的问题都更容易计算。与常规解法相比，它们在每次迭代过程中约束问题

的规模都在逐渐增大，而二阶下降法中的一阶段问题规模保持不变，通过不引入额外的约束来搜索需求方案的服务可靠性，计算时间基本保持一致，这也显示出了其计算的优势，这一点在后续的数值仿真中得以证明。另外一个优点是二阶下降法可以采用 ρ 来作为加速因子用来加速算法（通常选取已有的或者预期的服务可靠性因子），而其他的方法却不能。



（a）原始方案　　（b）常规解法　　（c）二阶下降法

图3　原始方案及解决方案示意图

3　算例分析

为了说明方法的有效性，引入图4所示的例子，节点1, 2, 3代表在不同时刻相同的某一公交站点，同样节点4和5代表不同时刻的另外一个公交站点，变量及相关定义如图4所示。

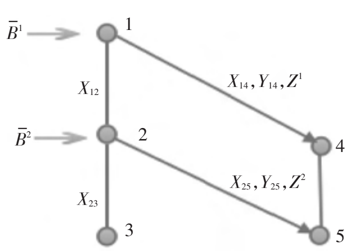


图4　公交实例模型

在每个边的两OD对上添加了乘客量 $X_{ij}=X_{ij}^1+X_{ij}^2$ 。假设随机需求采用均匀分布 $\bar{B}^1\sim U[0,b^1]$ 和 $\bar{B}^2\sim U[0,b^2]$ ，其中 $b^1=50$ ， $b^2=75$ 。总的运营成本包括常规服务耗费总和 $F=200$ 和特别服务耗费 Z ，单位耗费为 A 。等待时间的滞留罚金忽略不计。常规服务的最大车行规模为2，即 $U_{14}=U_{25}=2$, $Y_{14}\leqslant 2, Y_{25}\leqslant 2$ 。每个车行能力是60个乘客，也即 $\xi=60$ 。

这一问题转化成数学模型为：

$$\min_{X,Y,Z,\rho}\varphi(\rho)=F(Y_{14}+Y_{25})+\bar{E}$$

其中，一阶段问题为：

$$\begin{aligned}
&\min_{X,Y} I=F(Y_{14}+Y_{25})\\
\text{s.t.}\quad &X_{14}+X_{12}=\rho^1 b^1\\
&X_{23}+X_{25}-X_{12}=\rho^2 b^2\\
&X_{23}=0\\
&X_{14}\leqslant Y_{14}\xi\\
&X_{25}\leqslant Y_{25}\xi\\
&0\leqslant Y_{14}\leqslant 2,\ \ Y_{14}\text{ 为整数}\\
&0\leqslant Y_{25}\leqslant 2,\ \ Y_{25}\text{ 为整数}\\
&0\leqslant \rho_1\leqslant 1\\
&0\leqslant \rho_2\leqslant 1
\end{aligned}$$

二阶段问题为：

$$\begin{aligned}
&\min \bar{E}=\min\frac{1}{n^2}\sum_{r=1}^{n^2}E_r\\
\text{s.t.}\quad &E_r=A(Z_r^1+Z_r^2)\\
&X_{14}+X_{12}=B_r^1-Z_r^1\\
&X_{25}-X_{12}=B_r^2-Z_r^2\\
&X_{14}\leqslant Y_{14}\xi\\
&X_{25}\leqslant Y_{25}\xi
\end{aligned}$$

在一阶段中，利用不同的初始点 (ρ_1,ρ_2) 来比较实验结果，取 (0, 0) 到 (0.5, 0.5) ，步长为0.1。在二阶段中，将需求分布离散化来覆盖整个空间OD对需求。

首先，将2个均匀分布分割成均等的 n 份，每个小的间隔代表着概率为 $1/n$ 的可能性；

然后，列举出离散需求值集合中的所有可能性组合，生成 n^2 空间，每一个接合点的可能性为 $1/n^2$ 。例如（ $B_r^1=25$, $B_r^2=30$ ）是一个可能的维系，结果的精确度取决于离散化的需求分布水平（即 n 的值）。应用最优化 ρ 求解步骤求解该方案，结果如表1所示。通过改变单位特别服务耗费 A 可以生成一组不同的常规服务方案。结果显示， A 从10逐渐变到25的过程中，常规服务方案中 (Y_{14},Y_{25}) 从 (0, 0) 逐渐增加到 (1, 2) ， (0, 0) 表示放弃定制的常规服务而选择100%依赖特别服务， (1, 2) 表示达到车行规模最优方案。

表1　实验数据与结果

单位耗费 A	最佳可靠性 (ρ_1,ρ_2)	常规服务 (Y_{14},Y_{25})	总耗费	
			二阶下降法	原始解法
10	(0, 0)	(0, 0)	950.0	950.0
12	(0.2, 0.2)	(0, 1)	970.0	970.2
15	(0.3, 0.4)	(0, 2)	1 083.2	1 083.5

表1（续）

单位耗费 A	最佳可靠性 (ρ_1, ρ_2)	常规服务 (Y_{14}, Y_{25})	总耗费	
			二阶下降法	原始解法
20	(0.3, 0.4)	(0, 2)	1 205.0	1 205.6
25	(0.3, 0.5)	(1, 2)	1 433.6	1 434.1

4 数据结果对比

这一结果的精准度依赖于随机需求的分布水平，根据表1，二阶下降法得到的总的耗费和原始解法得到的结果非常接近，即使对于每个变量 A，基于二阶下降法可以像原始解法那样生成相同的常规服务安排，但它们之间会存在微小的差异。结果表明不同的变量 A 生成不同的 ρ 和 Y 的最优值，尽管常规服务 Y 对基于服务可靠性的二阶下降法和原始解法来说是一致的，但它们可能有不同的服务可靠性方案，即 ρ 会有不同的解或者多解来生成相同的常规服务方案 Y 。因此，比较二阶下降法和原始解法在 $A=10, A=12, A=15$ 和 $A=20, A=25$ 时的最优可靠性。在不同的时间到达公交站点的OD对需求在不影响总的常规服务耗费情况下会加载等量的公交出行，恰好这些OD对需求加载方案会生成不同的常规服务。这一结果表明，有很多种最优服务可靠性组合也会导致相同的最优方案总耗费。

5 结语

本文通过服务可靠性在随机需求条件下建立了一类随机公交网络服务设计模型，服务可靠性可以分离出依赖于混合整数线性规划的二阶随机整数方案，通过二阶下降法规定不确定的随机变量参数 ρ 来求解二阶随机方案。首先通过在一阶段减少混合整数规划中约束条件的数量，可以节省大量的计算时间，随后在二阶段中模拟出一个线性规划，便可以有效地解决问题。在实践层面，该方法可以广泛应用到交通网络设计中，比如通过制定最优化组合的固定航线或者实行灵活的出行服务来使得预期耗费最小；或者在物流方面规划出货车的出行方案以及交互服务，可以处理一些随机的需求溢出。作为基于不确定性的二阶随机方案，将其扩展到大规模的网络仍是一巨大挑战，如何将用户均衡原则融合到随机方案中将是接下来研究的重点。

参考文献

[1] 高自友，吴建军. 出行者博弈、网络结构与城市交通系统复杂性[J]. 复杂系统与复杂性科学，2010，7(4)：55-64.

[2] 郑啸，陈建平，邵佳丽，等. 基于复杂网络理论的北京公交网络拓扑性质分析[J]. 物理学报，2012，61(19)：95-105.

[3] 王喆，彭其渊. 成都市公交复杂网络拓扑特性研究[J]. 交通与计算机，2007(2)：39-42.

[4] GAO Z Y, SUN H J, SHAN L L. A Continuous Equilibrium Network Design Model and Algorithm for Transit Systems [J]. Transportation Research Part B: Methodological, 2004, 38(3): 235-250.

[5] SZETO W Y, JIANG Y, WONG K I. Reliability-Based Stochastic Transit Assignment with Capacity Constraints: Formulation and Solution Method[J]. Transportation Research Part C: Emerging Technologies, 2013(35): 286-304.

[6] 刘志谦，宋瑞. 基于复杂网络理论的广州轨道交通网络可靠性研究[J]. 交通运输系统工程与信息，2010，10(5)：194-200.

[7] 丁小兵. 复杂网络理论及其在上海城市轨道交通网络可靠性分析评价中的应用[J]. 城市轨道交通研究，2012，(11)：50-53.

[8] WANG Z W, LO H K. Multi-Fleet Ferry Service Network Design with Passenger Preferences for Differential Services [J]. Transportation Research Part B: Methodological, 2008, 42(9): 798-822.

[9] BAGLOEE S A, CEDER A. Transit-Network Design Methodology for Actual- Size Road Networks[J]. Transportation Research Part B: Methodological, 2011, 45(10): 1787-1804.

[10] 陆化普，蔚欣欣，卞长志. OD需求不确定的离散交通网络设计模型研究[J]. 公路交通科技，2011，28(5)：128-132.

[11] 孙华，高自友，龙建成. 不确定OD需求下连续交通网络设计的鲁棒优化模型[J]. 交通运输系统工程与信息，2011，11(2)：70-76.

[12] 范大娟，黄志球，肖芳雄，等. 一种需求驱动的服务行为适配方法[J]. 四川大学学报：工程科学版，2014，46(2)：95-104.

[13] 徐英俊，程天成. 随机需求下公交网络设计的期望值模型与求解算法研究[J]. 交通标准化，2013(17)：22-25.